Fatiga multiaxial en ejes de gran par

Los fallos por fatiga en estructuras y piezas han causado numerosos desastres por roturas inesperadas desde la época de la primera Revolución Industrial, fecha que podemos considerar como el comienzo del análisis racional de los fenómenos de fractura y de fatiga.

Ángel de Andrés Martínez

Profesor Propio Adjunto de la E.T.S.I. del ICAI. Dr. Ingeniero Industrial e Ingeniero Técnico Mecánico. Comparte su actividad docente en la UPCO con la dedicación al Instituto de Investigación Tecnológica.



1. Introducción histórica

a evolución de los conocimientos sobre fatiga estuvo inicialmente ligada a la industria del ferrocarril ya que, durante los años 40 del pasado siglo, las roturas de ejes en las zonas de los cojinetes se producían con muchísima frecuencia. Fue August Wöhler (1819-1914) durante las décadas de 1850 y 1860, quien realizó la primera investigación sistemática del fenómeno de fatiga. Wöhler trabajó en la industria del ferrocarril y realizó numerosos ensayos de laboratorio sometiendo probetas a esfuerzos alternativos, gracias a los cúales introdujo el concepto de límite de fatiga y el diagrama S-N (diagrama que relaciona el nivel tensión alternativa pura con el número de ciclos hasta rotura de una probeta).

Pero podemos decir que el primer estudio sistemático del fenómeno de la fractura fue llevado a cabo por Griffith ^[1], utilizando probetas de vidrio, estudio que le permitió descubrir que la resistencia del vidrio dependía del número de micro-grietas existentes. Griffith postuló que el criterio para que se produjera el crecimiento inestable de grietas estaba basado en el balance entre la energía de deformación liberada en el proceso de la fractura y el trabajo necesario para formar nuevas superficies de fractura. Según esto, el crecimiento inestable de grietas ocurre cuando:

 $G\geq 2\Gamma$

siendo G, la energía de deformación liberada en la fractura,



y Γ el trabajo requerido para formar nuevas superficies de fractura (2 superficies).

Ahora bien, el comportamiento del vidrio es totalmente frágil mientras que, normalmente, los materiales que se utilizan en la industria son más o menos dúctiles, por lo que fue necesario hacer extensivo el criterio de Griffith a materiales dúctiles, lo que hicieron Irwing ^[2] y Orowan ^[3] en 1930. Para estos materiales dúctiles el crecimiento inestable de las grietas ocurre cuando:

$G \geq 2\Gamma \,+\, \Delta$

siendo Δ el trabajo asociado con las deformaciones permanentes que tienen lugar en la punta de la grieta.

Años más tarde, Irwing ^[4] introdujo el concepto de coeficiente de intensificación de tensiones que ha constituido la base de la teoría elástica de la fractura(L E F M : "Linear Elastic Fracture Mechanics"). Poco después comenzó a desarrollarse la teoría elastoplástica de la mecánica de la fractura (E P M F: "Elasto-Plastic Fracture Mechanics"), aunque su gran complejidad ha provocado una lenta evolución y, todavía hoy, es una disciplina en desarrollo.

En los años 60, Paris ^[5] sugirió que el crecimiento de grietas frente a cargas variables (fatiga), podía cuantificarse en función del coeficiente de intensificación de tensiones (parámetro que caracteriza el estado singular de tensiones y deformaciones en las inmediaciones de la punta de la grieta.). Todas estas ideas constituyen los conceptos fundamentales que soportan la "Mecánica de la Fractura", indispensable hoy para el estudio del fenómeno de la fatiga.

2. Planteamiento del problema

🗖 l proceso de fatiga ocurre 🖵en aquellas zonas de una pieza donde las tensiones y las deformaciones sean lo suficientemente elevadas como para causar deslizamientos en el material. En las aplicaciones reales, las regiones de máxima tensión y deformación se producen en las zonas de discontinuidad donde la tensión nominal aumenta según el llamado "factor de concentración de tensiones". Existen dos fases distintas en el proceso que se desarrolla en el comportamiento de una estructura sometida a esfuerzos variables capaces de ocasionar la fractura por fatiga. Cada fase se puede modelar de una forma distinta, siendo dichas fases la de iniciación de la grieta y la de propagación de la misma, como comentamos a continuación:

a) El modelo de iniciación de grieta, basado en:

– Curvas S-N. – Curvas E-N.

Siendo "S" la tensión alternativa aplicada, "E" la deformación unitaria y N el número de ciclos de carga. Una vez que la grieta tiene el tamaño suficiente para alterar el estado tensional de la región en estudio, la aproximación basada en el cálculo de tensiónciclos o deformación-ciclos, no es adecuada.

 b) El modelo de propagación de grieta, basado en conceptos de Mecánica de la Fractura.

La vida total de una pieza es la suma del tiempo de las fases de iniciación y propagación. En condiciones de diseño, el modelo de iniciación proporciona una duración inferior a la duración real con lo que, no teniéndose en cuenta el tiempo que tarda en propagarse una grieta, se está del lado de la seguridad. En otras ocasiones, el método de propagación es el único válido, ya que, por el proceso de fabricación, la estructura podría tener microgrietas o incluso, macrogrietas. Hay que tener en cuenta que la existencia de una grieta no conduce automáticamente a la rotura, pues estas grietas pueden detenerse si, por ejemplo, entran en un campo de gradiente negativo de tensiones.

En este artículo se pretende comentar un procedimiento numérico que, basado en el Método de los Elementos Finitos, permita simular el crecimiento de grietas por fatiga en materiales dúctiles. En el método propuesto, se discretiza el cuerpo en estudio mediante una malla de Elementos 3D Elastoplásticos, representando el daño que propicia la formación y crecimiento de grietas mediante la degradación de las interfaces de unión entre los elementos. Esto se concreta introduciendo en



Figura 1. Definición del deslizamiento relativo.

la malla lo que vamos a denominar a partir de ahora "Elementos Interface Cohesivos", planos de espesor inicialmente nulo, que se insertan entre las caras comunes de los elementos elastoplásticos genéricos.

Sabemos que en el Método de los Elementos Finitos se discretiza el medio continuo en estudio en pequeñas parcelas o elementos, conectados entre sí mediante puntos o nodos (el resultado de la discretización así obtenida se llama malla o mallado). A continuación, sobre cada una de estas parcelas o elementos se supone una forma de la función solución del problema de fácil formulación y se obtiene la solución en el conjunto como superposición de las soluciones parciales en cada elemento.

3. Comportamiento del "Elemento Interface cohesivo"

En un proceso de fractura dúctil, la aparición de una grieta viene precedida por el deslizamiento relativo entre planos cristalinos del sólido en cuestión, deslizamiento que se va incrementando hasta que, llegado a un valor crítico de la carga, se produce la decohesión que da origen a la aparición de dislocaciones en la red. (Ver fig. 1)

Siguiendo el modelo planteado por PEIERLS (1940)^[6], existe una relación funcional entre la tensión cortante τ y el desplazamiento relativo en uno de los planos de deslizamiento. En la figura l "u_s+" representa el desplazamiento en la dirección "s" de la cara superior de la grieta, mientras que "u_s-" representa el desplazamiento de la cara inferior. Por el momento, supuesto que existe continuidad para el resto de desplazamientos, la relación τ/δ tendría una forma como la que aparece representada en la figura 2 en la que vemos que la relación τ/δ presenta la forma de una función periódica, donde el área bajo la curva ($\emptyset = \int \tau d\delta$) representa la energía invertida en el proceso de formación de la dislocación, como se aprecia en la figura 3.

Se comprueba además que ø alcanza su valor máximo cuando $\delta = b/2$, momento a partir del cual se produce la decohesión. A este valor máximo de la energía (ø/: ø_{max} = γ_{US}), se le denomina "Unstable Stacking Energy" y representa la barrera energética que es preciso superar para la formación de dislocaciones en un proceso de fractura dúctil.

Siguiendo esta línea se han planteado también modelos más precisos, en los cúales existen discontinuidades en los desplazamientos normal y tangencial, por parte de Beltz y Rice ^[7] ^[8] y Sun ^[9]. Sin embargo, lo que aquí nos ocupa no es tanto la discu-



Figura 2. Curva τ/δ .



sión detallada de los modelos antes citados como su aplicación a la simulación del Crecimiento de Grietas mediante el Método de los Elementos Finitos.

Para este fin se propone el diseño y empleo de los ya citados "Elementos Interface Cohesivos", elementos que unen superficies adyacentes y son tales que, en estado indemne, presentan una separación nula entre caras. Sin embargo, ante procesos de fatiga pueden acumular daño que permite su apertura o elongación progresiva, simulando así el proceso de formación de nuevas superficies de fractura. Realmente, es como si entre nodos comunes de una malla genérica hubiésemos colocado un sistema de resortes no lineales en las tres direcciones del espacio con posibilidad de deteriorar sus propiedades elásticas (Ver fig. 4).



Figura 3. Definición de la función $\Phi(\delta)$.

En la mayor parte de los modelos de fractura cohesiva que podemos encontrar en la literatura ^{[10][11][12][13]}, se parte de una relación tensión / elongación más o menos elaborada, pero de carácter reversible mientras no se alcance un límite a partir del cual el elemento pierde totalmente su capacidad de soportar nuevos esfuerzos. (Ver fig. 5) La diferencia entre el modelo que se plantea en este trabajo y los anteriores es que no se plantea la rigidez del elemento cohesivo como un proceso de "todo o nada", tal y como sugiere el modelo elástico reversible, sino que consideramos aquí que, desde el estado intacto hasta el totalmente deteriorado, el elemento cohesivo atraviesa por unos estados graduales de



Figura 4. Comportamiento de los interfaces.



Figura 5. Curvas t/8 habituales.

pérdida de sus propiedades mecánicas es decir, se puede degradar o acumular daño de forma continua, siguiendo el proceso que resumimos a continuación.

Para ello consideramos que la ley del comportamiento del elemento parte de una relación tensión/elongación que, para un problema tridimensional genérico, precisa definir los conceptos de elongación y tensión efectivas t_{eff} / δ_{eff} , tal y como se hace con las *tensiones* / *deformaciones* equivalentes en problemas de plasticidad.

3.1. Relación
$$t_{eff}/\delta_{eff}$$

Definiendo los ejes locales del elemento, según la figura 6, se ha manejado un concepto de *tensión / elongación* efectivas acorde con el propuesto por Camacho y Ortiz^[14], tal que:

$$t_{eff} = \sqrt{t_3^2 + \beta^2 (t_1^2 + t_2^2)}$$
$$d_{eff} = \sqrt{\delta_3^2 + \beta^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2)}$$

siendo β el valor que relaciona la resistencia normal y la tangencial de la entrecara:

$$\beta = \frac{\tau_c}{\sigma_c}$$

Como relación funcional que liga la tensión efectiva con la elongación efectiva para el elemento indemne se ha tomado la propuesta por Rose-Ferrante-Smith ^[15]:

$$t_{eff} = A \delta e^{\frac{-\delta}{\delta_c}}$$

El valores de las constantes A y d_c se deducen fácilmente de la figura 7 a partir de las propiedades del material considerando como σ_c la tensión de rotura del material y G_C el valor crítico de la energía liberada en la fractura (que para un material en concreto puede hallarse fácilmente en los prontuarios), igual al área encerrada bajo la curva t_{eff} / δ_{eff} .



Figura 6. Definición del Elemento Interface.



Figura 7. Relación de Smith-Ferrante.

3.2. Descripción de la acumulación de daño

A continuación, apoyándonos en la figura 8, pasamos a describir cómo se produce la acumulación de daño producto de una carga variable, en el elemento.

En la figura 8-l partimos de un elemento intacto, con su curva de respuesta según la ley de Smith-Ferrante ya descrita, y representamos la respuesta ante el incremento de carga 1-2 que, lógicamente, sigue la curva original propuesta.

En la figura 8-2 se muestra la respuesta ante la descarga 2-3. Vemos como la descarga no sigue un camino inverso a la carga, sino que ahora se produce una descarga lineal al origen de coordenadas que nos lleva al punto 3 de la figura. A partir de aquí, se sustituye la curva de respuesta t/ δ original por la nueva curva (área sombreada de la figura 8-2). La diferencia entre el área encerrada por la curva original y el área rayada representa la energía liberada por el deterioro del elemento (área O-1-2-3-O).

En la figura 8-3 se muestra como sería la respuesta del elemento así dañado frente a un nuevo ciclo de carga. Vemos como una misma rampa de carga produce una mayor elongación en el elemento, al recorrer ahora la línea O-3-2-4, frente al camino O-1-2 del elemento intacto. Si a continuación procediésemos a la descarga, ésta sería lineal al origen desde el punto 4, lo que conllevaría un nuevo deterioro del elemento según el proceso descrito.



Figura 8. Acumulación de daño.

Con estos conceptos hemos realizado una aplicación simulando el crecimiento de una grieta en un eje sometido a esfuerzos axiales y de torsión alternativos y hemos contrastado los resultados obtenidos, mediante el método aquí preconizado, con los obtenidos experimentalmente.

4. Aplicación práctica

C omo aplicación práctica fundamental del modelo propuesto, se ha tratado de reproducir el estudio llevado a cabo por Thompson & Sheppard ^{[16] [17]}, en el que se aportan suficientes datos experimentales para servir de punto de com-



Figura 9. Dimensiones del eje y de la entalla.

paración. Se trata de la simulación del crecimiento de una grieta en un eje frente a esfuerzos axiales y de torsión alternativa.

Para ello, partimos de un modelo que consta de un eje en cuya superficie se ha labrado una entalla. Las dimensiones del eje y de la entalla se muestran en la figura 9. Como puede apreciarse, la entalla se sitúa en un plano transversal al eje, de forma que al aplicar esfuerzos axiales alternativos tendremos crecimiento de grieta en Modo I puro, mientras que al aplicar esfuerzos de torsión alternativa tendremos crecimiento en Modo III.



Figura 10. Mallado del eje y ubicación de los elementos interface.

Propiedad	Símbolo	Valor	Unidad
Límite Elástico	sy	311	MPa
Tensión Máxima	sc	460	MPa
Coeficiente de Poisson	v	0.3	Adim.
Módulo de Young	E	7.2 E4	MPa
Módulo Resistente Cortante	m	2.77 E4	MPa
Critical Energy Release Rate	Gc	75	MPa x mm
Ratio tc/sc	b	0.5	Adim.

Tabla 1

En la figura 10A se muestra la malla empleada para la simulación numérica del crecimiento de la grieta en el eje anteriormente descrito. La figura 10B muestra un detalle de la ubicación de los elementos interface en el submodelo. Como puede apreciarse, se ha discretizado sólo la mitad de una porción del eje con objeto de aprovechar las simetrías. En el plano donde se prevé que progresará la grieta se situan los elementos interface que se irán abriendo conforme la grieta avance.

Las características del material empleado se corresponde igualmente con las de la referencia empírica: se trata de aluminio 2024-T351, cuyas propiedades más destacables se listan en la tabla 1.

Para cada uno de los supuestos se obtiene:

- A) Valor de la vida a fatiga en número de ciclos de carga soportados por la probeta.
- B) Curvas de isodaño y aperturas efectivas para las etapas intermedias.
- C) Tensión de Von Mises en el plano de la grieta.

En las figuras 11 y 12 se han representado los valores del daño en el plano de avance de la grieta (sección transversal de eje) para un instante dado. El color naranja representa la zona ya agrietada, mientras que el color azul indica la superficie intacta. Entre ambas se ubica la zona dañada parcialmente con colores que oscilan entre el azul (daño "0", zona intacta) y el naranja (daño "l", grieta completamente abierta) anteriormente descritos.



Figura 11. Curvas de daño N = 345000 ciclos.



Figura 12. Tensión de Von Mises para N = 345000 ciclos.



Figura 13. Curvas de daño N = 540000 ciclos.

En las figuras 13 y 14 se muestra el valor de la tensión equivalente calculada según el criterio de Von Mises en el plano de la grieta. Los colores cálidos indican los niveles más altos de tensión y los colores fríos los niveles más bajos. Se superpone en dicha figura la posición actual del frente de grieta junto con la indicación de las zonas de la pieza en que se ha superado el límite elástico del material.

4.1. Resultados para tracción alternativa

La figura 11 muestra un ejemplo de curvas de crecimiento, mientras que en la figura 12 se muestra el valor de la tensión de Von Mises en el plano de la grieta. 4.2. Resultados para torsión alternativa

La figura 13 muestra un ejemplo de curvas de crecimiento, mientras que en la figura 14 se muestra el valor de la tensión de Von Mises en el plano de la grieta.

5. Análisis de resultados

Figura 14. Tensión de Von Mises para N = 540000 ciclos.

a figura 15 muestra la correlación entre la vida media a fatiga obtenida experimentalmente y la que se desprende del procedimiento numérico, para el supuesto de tracción alternativa, mientras que en la fi-



Figura 15. Comparación de vidas experimental y numérica (tracción alternativa).



Figura 16. Comparación de vidas experimental y numérica (torsión alternativa).

gura 16 aparece dicha comparación para torsión alternativa.

Fenómenos como los efectos de borde sobre el estado tensional en la punta de grieta o la ralentización del crecimiento en la superficie debido a la presencia de labios de corte, aparecen de forma natural en el modelo numérico propuesto sin tener que recurrir a modificaciones artificiosas más o menos encubiertas.

No se limita la utilidad del método propuesto a problemas de cargas alternativas puras. Por contra, el modelo numérico que se plantea es especialmente adecuado para abordar el efecto de los transitorios de funcionamiento sobre las grietas que aparecen en elementos mecánicos y más concretamente sobre ejes de máquina. La elección de un problema de respuesta ante carga puramente alternativa ha sido motivada por disponer de un suficiente número de datos experimentales con que cotejar los resultados obtenidos.

Las simulaciones numéricas que se presentan han sido llevadas a cabo con implementación de elementos y algoritmos en el programa de elementos finitos de investigación FEAP 4.3.2, mientras que el mallado de los modelos se ha realizado con el programa comercial ANSYS 5.0a. El paso de datos de un programa a otro se realiza mediante un programa de transformación de datos de confección propia. Las imágenes de curvas de daño, aperturas y tensiones equivalentes de Von Mises han sido obtenidas con el postprocesador del programa FEAP: este programa nos ha sido cedido por el profesor Dr. Robert Taylor de la Universidad de Berkeley.

6. Conclusiones

🗖 l conjunto de simulaciones 🖵 numéricas llevadas a cabo en el presente trabajo prueba las buenas características del elemento finito propuesto de cara a su empleo en la simulación de fenómenos de crecimiento de grietas y aporta una modelización más acorde con el comportamiento real de las superficies de fractura en materiales dúctiles y es ésto lo que motiva su gran eficacia a la hora de elaborar predicciones sobre el comportamiento real de una pieza o estructura.

Los problemas resueltos constituyen la base para establecer un modelo numérico eficaz para la resolución de un espectro amplio de problemas en Mecánica de la Fractura Elástica Lineal y Elasto-Plástica. Queda pendiente una segunda fase de "explotación del éxito" alcanzado, en donde se pueda abordar todo el amplio elenco de situaciones que el procedimiento numérico permite analizar.

Este nuevo método permite la resolución de problemas convencionales de Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, como la obtención de Coeficientes de Intensificación de Tensiones en casos simples y complejos, perfiles de apertura o cualesquiera otros parámetros identificativos. No obstante, no es éste el fin primordial para el que ha sido diseñado. Su aplicabilidad no se limita a problemas elásticos lineales. El mallado general con elementos 3D elastoplásticos hace que, sin necesidad de tener que realizar ningún análisis a priori ni asumir consideraciones previas, sea posible resolver problemas de la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica ya que el método se aplica sin ningún tipo de modificaciones a cualquier situación. No es necesario preocuparse por el hecho de que el problema entre dentro del rango elástico lineal o no.

Además de todo ello, nos ofrece la posibilidad de monitorizar el crecimiento de las grietas en problemas tridimensionales sin tener que recurrir a procedimientos complejos de recomposición de malla para adaptarla a las sucesivas posiciones del frente de grieta. El hecho de que el caso que se ha estudiado limite el crecimiento al plano inicial de la fractura, obedece únicamente a la posible constatación empírica de esta situación y no a una limitación intrínseca del procedimiento empleado, va que bastaría situar elementos interface en todas las caras de los elementos cúbicos que rodean una determinada zona, para ofrecer la posibilidad a cada punto del frente de grieta de crecer en cualquier dirección del espacio. (2)

Bibliografía

[1] Griffith, A. A. (1921). "The phenomena of rupture & flow in solids", Phil. Trans., A221, 163-198.

[2] Irwing, G.R. (1948). "Fracturing of metals", Proc. ASM Symposium: Chicago, Cleveland.

[3] Orowan, E. (1952). "Fundamentals of brittle behaviour in metals", Fatigue and fracture of metals, Ed. W. Murray, John Wiley, New York, p. 139.

[4] Irwing, G.R. (1957). "Analisys of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate", J. Appl. Mech., 24, 361-364.

[5] Paris, P.C. (1964). "The fracture mechanics approach to fatigue", Fatigue: an interdisciplinary approach, Ed. J.J. Burke, N.L. Reed & V. Weiss, Syracuse University Press, p. 107-132.

[6] Peierls, R. E. (1940). "The size of a dislocation", Proc. Phys. Soc., 52:34 -37.

[7] Rice, J.R., Beltz, G. E. (1992). "Peierls ramework for dislocation nucleation from a crack tip". Topics in Fracture and Fatigue (de. A. S. Argon) chap. 1, pp. 1-58. Springer Verlag, Berlin.

[8] Rice, J.R., Beltz, G. E. (1994). "The activation energy for dislocation nucleation at a crack". J. Mech. Phys. Solids, Vol. 42, No. 2, pp. 333-360.

[9] Sun, Y. (1993). "Atomistic aspects of dislocation/crack tip interaction. Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, MA.

[10] Krajcinovic, D. (1989). "Damage Mechanics", Mechanics of Materials, No. 8, pp. 117-197.

[11] Xu, P., Needleman, A. (1994) "Numerical analyses of dynamic brittle fracture". Frac. and Dam. in Quasibrittle Struct., De. by Z. P. Bazant.

[12] Needleman, A. (1990) "An Analysis of a Tensile Decohesion along an Interface". J. Mech. Phys. Solids. Vol. 38, No. 3, pp. 289-324.

 [13] Planas, J. Elices, M. Guinea, G. V. "Cohesive cracks as a Solution of a Class of nonlocal Problems". Fracture & Damage in Quasibrittle Struct. De. by Z. P. Bazant. (1994)

[14] Camacho, G.T. and Ortiz, M. (1996). "Computational modelling of impact damage in brittle materials", Int. J. Solids Struc., 33, 2899-2938.

[15] Rose, J. H., Ferrante, J., Smith, J. R. (1981) Phys. Rev.L. 47, p. 675.

[16] Thompson, K.D., Sheppard, S.D. (1992) "Stress intensity factors in shafts subjected to torsion and axial loading", Eng. Fract. Mech., 42-6, 1019-1034.

[17] Thompson, K.D., Sheppard, S.D. (1992) "Fatigue crack growth in notched and plain shafts subjected to fatigue loading", Eng. Fract. Mech., 43-1, 55-71.